أول من درس نظرية البيان كمفهوم رياضي أويلر 1736 من خلال مسألة معروفة هي مسألة الجسور وكذلك من خلال الانطلاق من نقطة على اليابسة A,B,C,D والعبور عبر جميع الجسور وعدد هذه الجسور (7) ثم العودة إلى نفس النقطة على أن يستخدم الجسر لمرة واحدة فقط

A , B نقاط يابسة في النهر
C , D تمثل نقاط يابسة على شاطئ النهر

نهر بريكل

في بداية القرن العشرين أخذت نظرية البيان تأخذ اهتماماً واسعاً من قبل العلماء ونظراً لارتباط هذه المسألة بالحياة اليومية والتطبيقات من مسائل الارضيات الاولى والشبكات الكهربائية ومسائل النقل وعلوم الحاسب والتخطيط والاقتصاد

في الواقع العديد من العلماء اهتم بهذه المسألة من خلال تحويل هذه المسائل الوصفية إلى نموذج رياضي سهل حله

تعريف: لتكن $V \neq \emptyset$ مجموعة غير خالية من النقاط ولتكن E مجموعة من الخطوط التي تصل بين نقاط المجموعة V.

يسمى الشكل الهندسي المكون من المجموعتين V و E بالبيان

ونعطي بالشكل $G(V,E)$ حيث V تمثل مجموعة من الرؤوس (الذرى) Vertices
كل نقطة منها تسمى رأس vertex

E مجموعة من الأضلاع (Edeges) كل منها يسمى ضلعاً (edge)

- يمكن للأضلاع في البيان G أن تكون موجهة أي كل ضلع له سهم يدل على الاتجاه . في هذه الحالة نسمي البيان بيان موجه (Directed Graph)
وعندما تكون الأضلاع غير موجهة نسمي البيان بيان غير موجه (un Directed graph)
- سوف نصطلح على تسمية البيان غير الموجه بالبيان ونرمز له بالرمز $G(V,E)$

SABBAGH STATIONERY

درجة العروة = 2

• ملاحظة (1) اذا كان البيان لا يحتوي على اضلاع (أي رؤوس فقط) يسمى في هذه الحالة البيان فارغ

v_1 . v_2 . v_3

(2) اذا كان $p=1$ و $q=0$ أي البيان يتكون من رأس واحد فقط يسمى في هذه الحالة البيان التافه trivial graph

البيان البسيط Simplegraph

يسمى البيان G بياناً بسيطاً اذا لم يحتوي البيان على اضلاع متضاعفة ولا يحتوي على عروات (لفات)

في البيان اذا كان عدد الاضلاع منتهي يسمى هذا البيان بيان منتهي وان لم تكن عدد الاضلاع منتهي يسمى هذا البيان بيان غير منتهي

الضلعات المتجاورات:

يقول عن الضلعين e_1 و e_2 انهما متجاوران اذا اشتركا برأس واحد ويكونا غير متجاورين عند عدم اشتراكهما برأس واحد

مثال: ليكن لدينا البيان المعطى بالشكل:

v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9

العروة تحسب مرتين
$\rho(v_9)=2$

في هذا البيان مجموعة الرؤوس تسمى

$V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$

$E(G)=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$

رتبة البيان: عدد الرؤوس

$order(G)=|V(G)|=8$

قياس البيان:

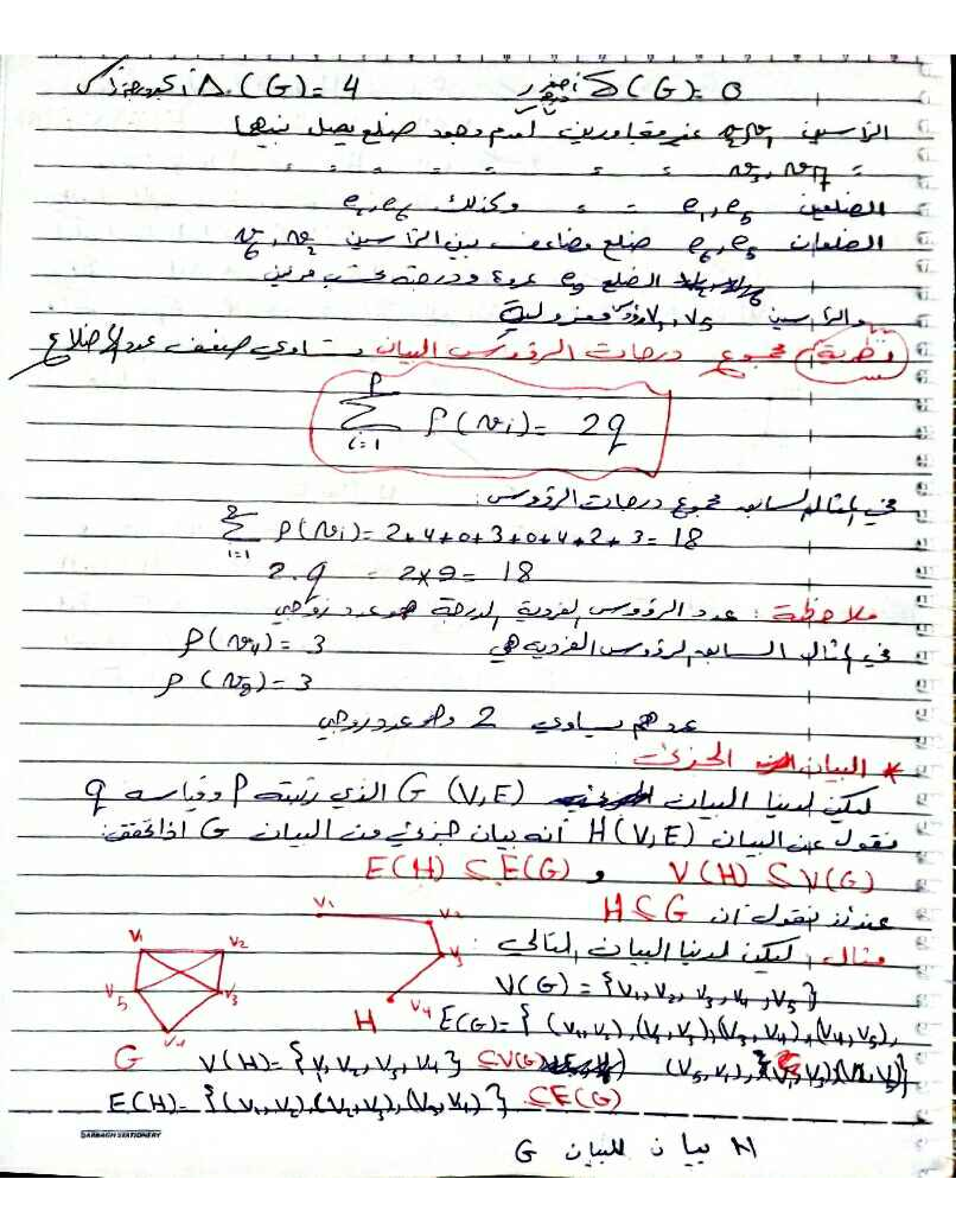
$size(G)=|E(G)|=9$

درجات الرؤوس،

$\rho(v_1)=2$, $\rho(v_2)=4$, $\rho(v_3)=0$, $\rho(v_7)=2$

$\rho(v_4)=3$, $\rho(v_5)=0$, $\rho(v_6)=4$

$\rho(v_8)=3$



$\Delta(G) = 4$: أكبر درجة $\delta(G) = 0$: أصغر درجة

الرأسين v_2, v_4 غير متجاورين لعدم وجود ضلع يصل بينهما

" v_7, v_3 " " " " " "

الضلعين e_1, e_5 " " وكذلك e_2, e_4

الضلعان e_6, e_9 ضلع مضاعف بين الرأسين v_2, v_6

الضلع e_8 عروة ودرجته تحسب مرتين

والرأسين v_3, v_5 رؤوس معزولة

نظرية: مجموع درجات الرؤوس في البيان يساوي ضعف عدد الأضلاع

$$\sum_{i=1}^{p} \rho(v_i) = 2q$$

في المثال السابق مجموع درجات الرؤوس:

$$\sum_{i=1}^{8} \rho(v_i) = 2+4+0+3+0+4+2+3 = 18$$

$$2.q = 2\times 9 = 18$$

ملاحظة: عدد الرؤوس الفردية الدرجة هو عدد زوجي

في المثال السابق الرؤوس الفردية هي $\rho(v_4) = 3$

$\rho(v_8) = 3$

عددهم يساوي 2 وهو عدد زوجي

*** البيان الجزئي**

ليكن لدينا البيان $G(V,E)$ الذي رتبته p وقياسه q

نقول عن البيان $H(V,E)$ أنه بيان جزئي من البيان G إذا تحقق:

$V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$

عندئذ نقول أن $H \subseteq G$

مثال: ليكن لدينا البيان التالي

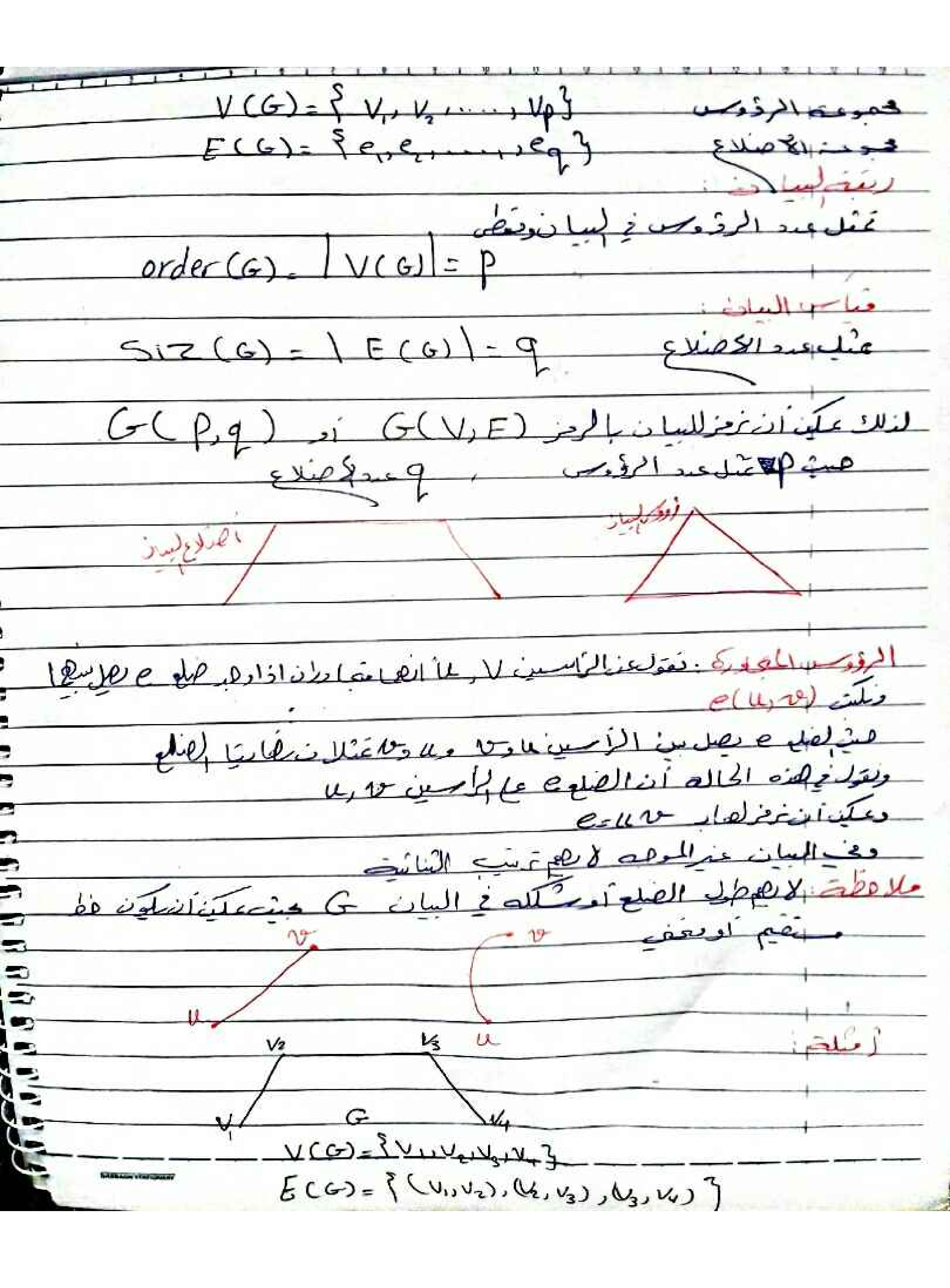
$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E(G) = \{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_4),(v_4,v_5),(v_5,v_1),(v_5,v_3),(v_1,v_3)\}$

$V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subseteq V(G)$

$E(H) = \{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_4)\} \subseteq E(G)$

H بيان للبيان G



مجموعة الرؤوس $V(G)=\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$

مجموعة الأضلاع $E(G)=\{e_1, e_2, \dots, e_q\}$

رتبة البيان:

تمثل عدد الرؤوس في البيان ونكتب

$order(G) = |V(G)| = p$

قياس البيان:

تمثل عدد الأضلاع $size(G) = |E(G)| = q$

لذلك يمكن أن نرمز للبيان بالرمز $G(V,E)$ أو $G(p,q)$

حيث p تمثل عدد الرؤوس ، q عدد الأضلاع

الرؤوس المتجاورة: نقول عن الرأسين v, u أنهما متجاوران إذا وجد ضلع e يصل بينهما ونكتب $e(u,v)$

حيث الضلع e يصل بين الرأسين u و v و u و v تمثلان نهايتا الضلع

ونقول في هذه الحالة أن الضلع e وقع على الرأسين u, v

ويمكن أن نرمز لها $e = uv$

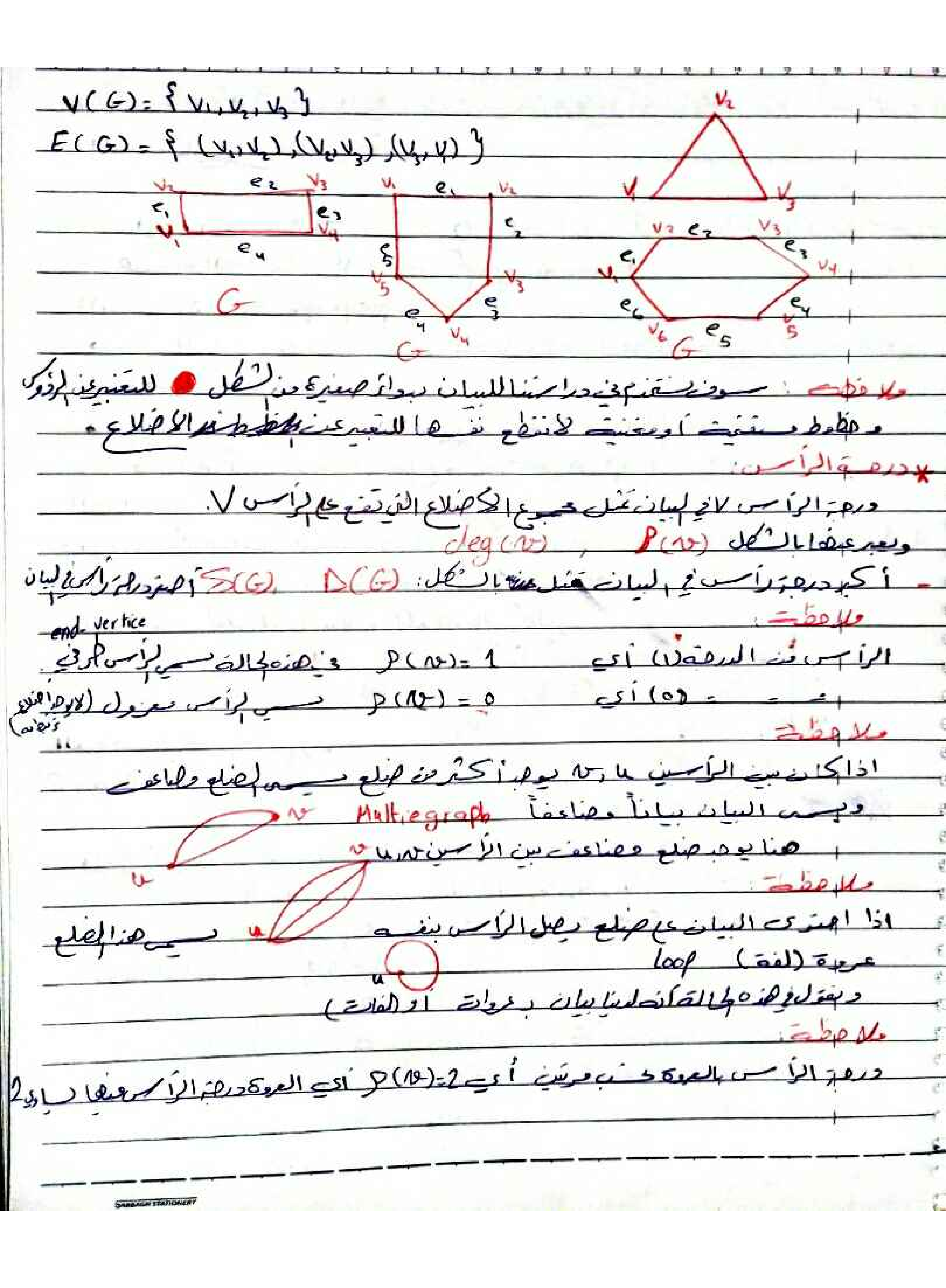
وفي البيان غير الموجه لا يهم ترتيب الثنائية

ملاحظة: لا يهم طول الضلع أو شكله في البيان G حيث يمكن أن يكون خط مستقيم أو منحني

أمثلة:

$V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$

$E(G)=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_4)\}$



$V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$

$E(G) = \{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_1)\}$

ملاحظة: سوف نستخدم في دراستنا للبيان نقاط صغيرة من الشكل ● للتعبير عن الرؤوس وخطوط مستقيمة أو منحنية لا تتقاطع نفسها للتعبير عن الخطوط أو الأضلاع.

* درجة الرأس:

درجة الرأس V في البيان تمثل مجموع الأضلاع التي تقع على الرأس V.

ويعبر عنها بالشكل $\rho(v)$ ، $deg(v)$

- أكبر درجة رأس في البيان تمثل بالشكل: $\Delta(G)$ ، $\delta(G)$ أصغر درجة رأس في البيان

ملاحظة:

end vertice

الرأس من الدرجة (1) أي $\rho(v) = 1$ في هذه الحالة يسمى الرأس طرفي.

" " (0) أي $\rho(v) = 0$ يسمى الرأس معزول (لا يوجد أضلاع تمسه)

ملاحظة:

اذا كان بين الرأسين u و v يوجد أكثر من ضلع يسمى الضلع مضاعف ويسمى البيان بياناً مضاعفاً Multiegraph

هنا يوجد ضلع مضاعف بين الرأسين u,v

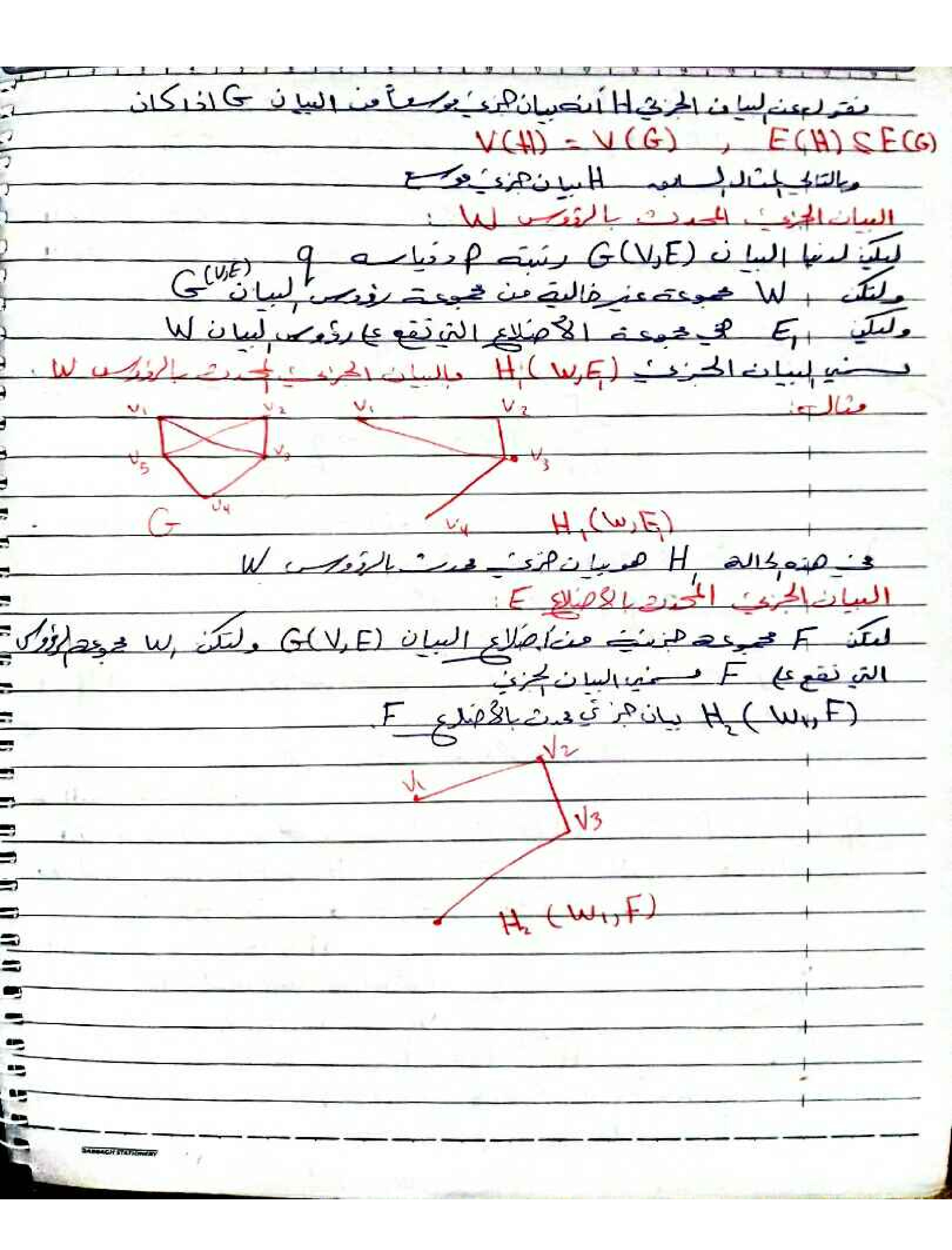
ملاحظة:

اذا احتوى البيان على ضلع يصل الرأس بنفسه يسمى هذا الضلع عروة (لفة) loop

ونقول في هذه الحالة أن لدينا بيان بعروات أو لفات

ملاحظة:

درجة الرأس بالعروة تحسب مرتين أي $\rho(v)=2$ أي العروة درجة الرأس عندها يساوي 2



نقول عن البيان الجزئي H انه بيان جزئي موسع من البيان G اذا كان

$V(H) = V(G) \quad , \quad E(H) \subseteq E(G)$

وبالتالي المثال السابق H بيان جزئي موسع

البيان الجزئي المحدث بالرؤوس W :

ليكن لدينا البيان $G(V,E)$ رتبته p وقياسه q

ولتكن W مجموعة غير خالية من مجموعة رؤوس البيان $G^{(V,E)}$

ولتكن E_1 هي مجموعة الاضلاع التي تقع على رؤوس البيان W

نسمي البيان الجزئي $H_1(W,E_1)$ بالبيان الجزئي المحدث بالرؤوس W

مثال :

في هذه الحالة H_1 هو بيان جزئي محدث بالرؤوس W

البيان الجزئي المحدث بالاضلاع F :

لتكن F مجموعة جزئية من اضلاع البيان $G(V,E)$ ولتكن W_1 مجموعة الرؤوس التي تقع على F نسمي البيان الجزئي

$H_2(W_1,F)$ بيان جزئي محدث بالاضلاع F